TD EM6

SF 1 -

à venir

Exercice 3 - Blocage d'apel

1) Les téléphones mobiles émettent à des fréquences de l'ordre de 2 GHz.
Cela correspond à des longueurs d'onde $\lambda = \frac{c}{f} = 15$ cm

2) Dans le métal, on a les équations de Maxwell :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} \quad \text{(loi d'Ohm locale)}$$

On a donc $\vec{\text{rot}}\,(\vec{\text{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$$= \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \gamma \vec{E}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Au final $\Delta\vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Dans le vide, on avait $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Dans le vide, le phénomène est réversible, alors que dans le milieu ohmique on reconnaît une équation de diffusion, non réversible.

3) On injecte la forme proposée dans l'équation

$$-k^2 \vec{E_0} e^{i(\omega t - kz)} - i\omega\gamma\mu_0 \vec{E_0} e^{i(\omega t - kz)} = \vec{0}$$

ie $-k^2 - i\omega\gamma\mu_0 = 0$

ou $k^2 = -i\omega\gamma\mu_0 = e^{-i\pi/2}\omega\gamma\mu_0$

On a donc $k = \pm\sqrt{\omega\gamma\mu_0}\, e^{-i\pi/4} = \pm\sqrt{\omega\gamma\mu_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \pm\underbrace{\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_0}{2}}}_{=\frac{1}{\delta}}(1-i) \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}}$$

$$\boxed{k = \pm\frac{1-i}{\delta}}$$

Réinjectons dans l'expression de $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t \mp \frac{1-i}{\delta}z)} = \vec{E_0} \underbrace{e^{\mp z/\delta}} e^{i(\omega t \mp z/\delta)}$$

ce terme ne doit pas pouvoir diverger $\Rightarrow$ on choisit $k = \frac{1-i}{\delta}$

On a donc $\underline{\vec{E}} = \vec{E_0}\, e^{-z/\delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta)}$

Cette onde est plane, mais pas progressive (il y a atténuation)

4) $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega \gamma \mu_0}} \sim \sqrt{\dfrac{2}{2\pi . 2.10^9 \times 10^6 \times 4\pi.10^{-7}}} = \underline{2.10^{-6}\ m}$

Il est logique que le 2° téléphone ne reçoivent pas l'appel, car l'onde est très atténuée, voire totalement nulle après avoir parcouru quelques δ, ie quelques µm.

Exercice 3 – Communication avec un satellite

1) L'onde se propage selon $+\vec{u_z}$ et est polarisée selon $\vec{u_x}$.

On utilise la relation de structure :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u_y}$$

2) $\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\frac{\|\vec{F}_{elec}\|}{\|\vec{F}_{mag}\|} = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|} \simeq \frac{\|\vec{E}\|}{v\,\|\vec{B}\|} = \frac{c}{v}$$

or, on a $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

$\vec{F}_{magn}$ est négligeable devant $\vec{F}_{elec}$ si $\frac{c}{v} \gg 1$ ie $\underline{v \ll c}$

3) Appliquons le PFD à un cation et à un anion

$$m_c \frac{d\vec{v_c}}{dt} = +e\vec{E} \qquad m_e \frac{d\vec{v_e}}{dt} = -e\vec{E}$$

or $\vec{j} = ne\vec{v_c} - ne\vec{v_e}$

ie $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne\left(\frac{d\vec{v_c}}{dt} - \frac{d\vec{v_e}}{dt}\right) = ne\left(\frac{e}{m_c}\vec{E} + \frac{e}{m_e}\vec{E}\right)$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne^2\left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_e}\right)\vec{E}}$$

4) $m_p = 1{,}6.10^{-27}$ kg

Le cation vient d'une molécule comme N_2 ou O_2 contenant donc une dizaine de protons et de neutrons. Ainsi leur masse sera de l'ordre de 10^{-26} kg ou 10^{-25} kg

Un électron a une masse $9{,}10^{-30}$ kg.

Ainsi $\frac{1}{m_r} + \frac{1}{m_e} \simeq \frac{1}{m_e}$ Et $\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e}\vec{E}}$

5) On a $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{rot}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu_0\frac{ne^2}{m_e}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Donc $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{ne^2}{m_e}\vec{E}}$

Posons $\mu_0\frac{ne^2}{m_e} = \frac{\omega_p^2}{c^2} = \omega_p^2\varepsilon_0\mu_0$

Donc $\boxed{\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$

6) On injecte dans l'équation et on obtient :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad \text{ie} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

7) Si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$, donc k est imaginaire pur

$$k = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm\frac{i}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}}.$$

On a alors $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, e^{i\omega t} e^{\pm z/\delta}\,\vec{u_x}$

Seul le signe - est acceptable (l'onde ne peut diverger), donc

$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, e^{-z/\delta} e^{i\omega t}\,\vec{u_x}$ $\Rightarrow$ l'onde ne peut traverser l'ionosphère si $\omega < \omega_p$!

au contraire, si $\omega > \omega_p$, $k \in \mathbb{R}$ et l'onde se propage

8) $\omega_p = 1.10^7\,\text{rad.s}^{-1}$ ie $f_p = 1{,}6.10^6\,\text{Hz} = 1{,}6\,\text{MHz}$

On a bien $f > f_p$ $\rightarrow$ les ondes peuvent traverser l'ionosphère.

Exercice 4 - Onde électromagnétique confinée.

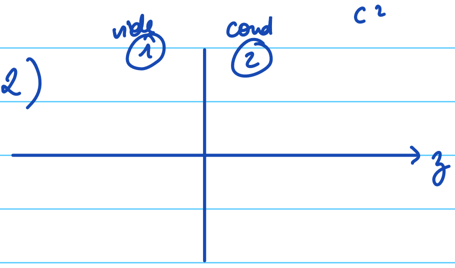
1) Dans le vide, $\underline{\vec{E_i}}$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2 \cancel{E_0 e^{i(\omega t - kz)}}\, \vec{e_x} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\cancel{E_0 e^{i(\omega t - kz)}}\, \vec{e_x} = 0$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$ ie $\boxed{\omega = kc}$

2)



On a $\underline{\vec{E_2}} - \underline{\vec{E_1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$

or $\underline{\vec{E_2}} = \vec{0}$

Donc $-\underline{\vec{E_1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$.

Supposons qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie. Alors $\underline{\vec{E_1}} = \underline{\vec{E_i}}$

On aurait alors $-E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u_x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$

$/\vec{u_x}$: $-E_0 e^{i(\omega t - kz)} = 0$ impossible !

Il y a donc une onde réfléchie : $\underline{\vec{E_r}}$ telle que

$$-\underline{\vec{E_i}}(0^-) - \underline{\vec{E_r}}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$$

$/\vec{u_x}$ $\quad -E_0 e^{i\omega t} - \underline{E_{rx}}(0^-) = 0 \rightarrow \underline{E_{rx}}(0^-) = -E_0 e^{i\omega t}$

$/\vec{u_y}$ $\quad 0 - \underline{E_{ry}}(0^-) = 0$

Au final $\underline{\vec{E_1}} = -E_0 e^{i(\omega t + kz)}\vec{u_x}$

L'onde totale est $\underline{\vec{E_1}} = \underline{\vec{E_i}} + \underline{\vec{E_r}} = E_0 e^{i\omega t}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right)\vec{u_x}$

$\underline{\vec{E_1}} = -2iE_0 \sin(kz)\, e^{i\omega t}\, \vec{u_x}$.

Il s'agit d'une onde plane stationnaire car les dépendances en temps et en espace sont découplées.

3) On a $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{E} = 2E_0 \sin(kz)\sin(\omega t)\,\vec{u_x}$

ie $\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{u_y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ainsi $\vec{B} = B\,\vec{u_y}$

$/\vec{u_y}$: $2E_0 k \cos(kz)\sin(\omega t) = -\frac{\partial B}{\partial t}$

on intègre : $B = \frac{2E_0 k}{\omega}\cos(kz)\cos(\omega t)$

et ainsi $\vec{B} = \frac{2E_0 k}{\omega}\cos(kz)\cos(\omega t)\,\vec{u_y}$

4) On a $\mu_0 \vec{j_s} = \vec{u_z}\wedge(\vec{0} - \vec{B}(0)) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\,\vec{u_x}$

Il y a donc apparition d'un courant surfacique colinéaire à $\vec{E}$. On peut interpréter ce courant comme étant à l'origine de l'onde réfléchie.

5) La relation de passage sur $\vec{E}$ impose $\vec{E}(-L) = \vec{0}$

ie $\sin(kL) = 0$ d'où $kL = n\pi$

On en déduit que les ondes existant dans la cavité sont celles de longueur d'onde

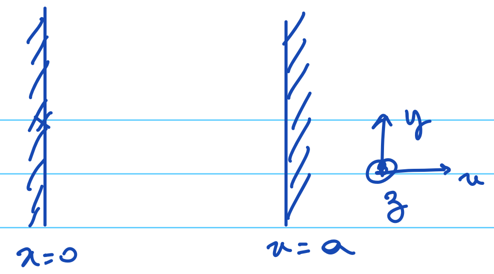
$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

6) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{(2E_0)^2}{\mu_0 c}\left(\sin(\omega t)\sin(kz)\,\vec{u_x}\wedge\cos(\omega t)\cos(kz)\,\vec{u_y}\right)$

$$= \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{\frac{\sin(2\omega t)}{2}}\sin(kz)\cos(kz)\,\vec{u_z}$$

Donc $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$ $\Rightarrow$ l'énergie ne se propage pas ! Logique avec des ondes stationnaires

Exercice 5 - guide d'onde



1) On cherche $\vec{E}$ solution de l'équation de d'Alembert et vérifiant les conditions aux limites $\vec{E}(0)=\vec{0}$ $\quad \vec{E}(x=a)=\vec{0}$

(*) On a $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$/u_y$ $\quad f''(x)\cancel{e^{i(\omega t-kz)}} - k^2 f(x)\cancel{e^{i(\omega t-kz)}} - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2)f(x)\cancel{e^{i(\omega t-kz)}} = 0$

$$f''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(x) = 0$$

On a nécessairement $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ car sinon $f(x)$ serait une somme d'exponentielles, et ne pouvant donc pas s'annuler 2 fois.

Notons $K^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$, on a alors $f(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$

or $f(0)=0 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$ $\quad$ donc $A=0$

et $f(a) = 0 = B\sin(Ka)$ $\quad$ donc $\boxed{Ka = n\pi}$ $\quad n \geq 1$

On a donc $\boxed{f(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$ $\quad$ on peut poser $B = E_0$ pour une notation plus naturelle

et $\boxed{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}$

2) L'onde se propage si $k \in \mathbb{R}$ (sinon il y a atténuation)

or $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

pour $k \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit $k^2 > 0$

ie $\omega^2 > \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}c^2$

ie $\boxed{\omega > \dfrac{n\pi}{a}c}$

Il y a donc une pulsation de coupure pour chaque mode n

(la plus petite valeur qui permet une propagation est $\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}$

3) Si $\frac{\pi a}{c} < \omega < \frac{2\pi a}{c}$, on a uniquement le mode 1.

mode 1 possible

mode 2 impossible

4) On a $\vec{E}(M,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y}$

$$\vec{B}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_0\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_x} - \frac{n\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}$$

On a donc

$$\vec{\Pi} = \underbrace{E_0^2\frac{k}{\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{u_z}}_{\text{de moyenne non nulle}} - \underbrace{\frac{n\pi}{\mu_0 a\omega}E_0^2\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{u_x}}_{\text{de moyenne nulle}}$$

de moyenne non nulle
correspond au transport de l'énergie par l'onde dans la direc° de propagation

de moyenne nulle
traduit les oscillations d'énergies entre les bords du guide
(logique pour une onde stationnaire)